CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 26 avril 1994

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 8

Le sujet comporte 3 pages

N.B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Dans les solutions proposées, toutes les affirmations devront être *correctement justifiées, et très lisiblement écrites.*
Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération.
Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.

Notations et conventions :

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont des fonctions réelles d'une variable réelle.
La série de terme général u_n sera notée $[u_n]$.

Partie I :

On considère l'équation différentielle linéaire (E) :

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \quad (E)$$

et l'équation homogène associée (H) :

$$x(x-4)y' + (x-2)y = 0 \quad (H)$$

où dans les deux cas, y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x.

1°) a) Résoudre l'équation (H) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$, $]4, +\infty[$.

b) Quelles sont les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (H) ?

2°) Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 4[$, $]4, +\infty[$.

3°) a) Montrez que l'équation (E) a une et une seule solution u définie sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, ayant une limite finie à gauche en 0, et donnez une expression de u(x).

b) Montrez que l'équation (E) a une et une seule solution v définie sur l'intervalle $]0, 4[$, ayant une limite finie à droite en 0, et donnez une expression de v(x).

c) Déduisez-en que l'équation (E) a une et une seule solution f définie sur l'intervalle $]-\infty, 4[$.

En particulier, précisez les valeurs de f(0) et f '(0).

d) L'équation (E) admet-elle une solution définie sur $\mathbb{R}$?

Partie II:

1°) a) Montrez que l'équation (E), définie dans la partie I, admet une et une seule solution g développable en série entière au voisinage de 0.

On cherchera cette solution sous la forme :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

On cherchera une relation entre a_n et a_{n-1} ($n \geq 1$), et on en déduira une expression de a_n en fonction de n.

b) Soit R le rayon de convergence de la série entière précédente.

Donnez l'expression de g(x) suivant les valeurs du réel x dans l'intervalle $]-R, R[$. On pourra utiliser les résultats de la partie I.

c) Déterminez la nature des séries $[a_n R^n]$ et $[a_n (-R)^n]$.

Pour chaque série, en cas de convergence, déterminez la somme.

Déduisez-en l'ensemble de réels pour lesquels les fonctions g et f coïncident (la fonction f a été définie à la partie I, en 3°) c)).

2°) Soit $[v_n]$ la série entière de la variable x de terme général :

$$v_n(x) = t^n (1-t)^n x^n \qquad (1)$$

où t est un réel de l'intervalle [0,1].

a) Déterminez le rayon de convergence R_t de cette série, pour un réel t fixé, et calculez sa somme V définie par :

$$\forall\, t \in [0,1], \forall\, x \in\,]-R_t, R_t[,\ V(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n (1-t)^n x^n \qquad (2)$$

b) Calculez l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^1 V(x,t)\, dt \qquad (3)$$

et précisez l'ensemble de définition de I.

c) Montrez que la fonction I est solution de l'équation (E), sur un intervalle à préciser.

Partie III:

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle (E_α) :

$$x(x-4)y' + (x-2)y = -2y^\alpha \qquad (E_\alpha)$$

où α est un réel strictement positif, et y^α la fonction définie par $y^\alpha(x) = (y(x))^\alpha$.

On se propose de trouver les solutions de cette équation, à valeurs strictement positives.

1°) Déterminez les solutions de l'équation (E_1).

2°) Dans la suite, on suppose α différent de 1.

Afin de résoudre l'équation (E_α), on divise chaque membre de (E_α) par y^α, et on fait le changement de fonction inconnue :

$$z = y^{1-\alpha} \qquad (4)$$

a) Formez l'équation différentielle vérifiée par la fonction z, soit (F_α).

b) Déterminez les solutions de l'équation (F_α), en utilisant un symbole d'intégration. Déduisez-en les solutions de l'équation (E_α).

c) Précisez en particulier les solutions de l'équation (E_3).